INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE COIMBRA

Departamento de Física e Matemática

Secção de Matemática

Exercícios

# Análise Matemática II

Licenciatura em Engenharia Electromecânica

2023/2024

## 1. Funções de várias variáveis reais e suas derivadas

### Revisões - Cónicas

1. Identifique o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ que verifica cada equação. Se possível, faça a sua representação geométrica.

   (a) $x^2 + y^2 - 5 = 0$ (b) $x^2 + y^2 = 0$ (c) $x^2 + y^2 + 2 = 0$

   (d) $x^2 + y^2 - 2x + y - 3 = 0$ (e) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 8y - 8 = 0$ (f) $x^2 - y^2 + 4 = 0$

   (g) $x^2 - y^2 - 4 = 0$ (h) $2x^2 + y^2 - 8 = 0$ (i) $4x^2 - y^2 + 8x - 2y - 5 = 0$

### Superfícies quádricas

2. Identifique as superfícies definidas por:

   (a) $5x^2 + 3y^2 = 4z$ (b) $5x^2 - 3y^2 = 4z$ (c) $5x^2 + 5y^2 = -4z$

   (d) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (e) $x^2 - y^2 - z^2 = 4$ (f) $-x^2 + y^2 + z^2 = 4$

   (g) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (h) $x^2 + y^2 = 4$ (i) $x^2 - y^2 = 4$

   (j) $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ (k) $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2x - y - 3 = 0$ (l) $x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 4z + 6 = 0$

### Noções de topologia em $\mathbb{R}^n$

3. Para cada uma das regiões determine o interior, a fronteira e averigue se é aberta ou fechada.

   (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| < 1, \ |y| < 1\}$

   (b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy \geq 1\}$

   (c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 1 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$

### Funções reais de várias variáveis reais

4. Para cada uma das funções: (i) determine o domínio e faça a sua representação geométrica; (ii) determine o interior e a fronteira do domínio; (iii) averigue se o domínio é aberto ou fechado.

   (a) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{y}}{x}$ (b) $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2}$ (c) $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$

   (d) $f(x, y) = \sqrt{y - x}$ (e) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$ (f) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

   (g) $f(x, y) = \ln(x^2 - y^2)$ (h) $f(x, y) = \arcsin(y - x)$ (i) $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

5. Apresente um esboço das curvas de nível e do gráfico de cada função.

   (a) $f(x, y) = 4 - y^2$ (b) $f(x, y) = x + y + 1$ (c) $f(x, y) = 1 - |y|$

   (d) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ (e) $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ (f) $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$

   (g) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2}$ (h) $f(x, y) = \sqrt{1 - x}$ (i) $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$

6. Esboce duas superfícies de nível para cada função.

   (a) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ (b) $f(x,y,z)=x+z$ (c) $f(x,y,z)=x^2+y^2$

7. Considere as funções reais $f$ e $g$ definidas da seguinte forma:

$$f(x,y)=\ln(4-y);\quad g(x,y)=\begin{cases} e^{f(x,y)} & \text{se} \quad 2-2x^2\leq y\leq -x^2+4 \ \wedge y\ \geq 0 \\ 4 & \text{se} \quad 1\leq x^2+y^2\leq 4\ \wedge\ y<0 \end{cases}.$$

   (a) Determine o domínio das duas funções e represente-os geometricamente.

   (b) Faça um esboço do gráfico da função $g(x,y)$.

**Limites e Continuidade**

8. Calcule os limites:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi/2,0)}\frac{\cos(y)+1}{y-\sin(x)}$ (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)}\frac{x^2-4y^2}{x-2y}$

9. Determine, se possível, os limites:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)}\frac{xy-2}{x+y-3}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{x^2(y-1)}{(x^2+y-1)^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{xy-x-y+1}{(x-1)^2+(y-1)^2}$

10. Calcule o limite na origem das funções:

   (a) $f(x,y)=\dfrac{e^{xy}}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$ (b) $f(x,y)=\dfrac{x^3-x^2y+xy^2-y^3}{x^2+y^2}$ (c) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y}$

   (d) $f(x,y)=\dfrac{yx^2}{(y+x^2)^2}$ (e) $f(x,y,z)=\dfrac{x+y-z}{4x-y}$ (f) $f(x,y)=\dfrac{xy(x^2-y^2)}{y^2+x^2}$

   (g) $f(x,y)=\dfrac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (h) $f(x,y,z)=\dfrac{yx^2+z^3}{x^2+y^2+z^2}$ (i) $f(x,y)=\dfrac{e^y\sin(x)}{x}$

11. Estude quanto à continuidade cada uma das funções:

   (a) $f(x,y)=\sqrt{6-2x^2-3y^2}$ (b) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{\sqrt{6-x^2-y^2}}$

   (c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$ (d) $f(x,y)=\begin{cases}1-x & \text{se} \quad y\geq 0\\ -2 & \text{se} \quad y<0\end{cases}$

   (e) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$ (f) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin x-\sin y}{x-y} & \text{se} \quad x\neq y\\ 0 & \text{se} \quad x=y\end{cases}$

12. Considere a função

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x-y} & \text{se} \quad x\neq y\\ g(x) & \text{se} \quad x=y\end{cases}.$$

   Determine a função $g$ de modo que $f$ seja contínua em $\mathbb{R}^2$.

13. Defina para a função $f(x,y)=\dfrac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ uma extensão contínua $h$ em $\mathbb{R}^2$.

**Derivadas parciais e Teorema Schwarz**

14. Calcule por definição as derivadas parciais de primeira ordem das funções seguintes:

    (a) $f(x,y) = x + 2y$ (b) $f(x,y) = x^2y^3$ (c) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

15. Determine as derivadas parciais de primeira ordem das funções seguintes:

    (a) $f(x,y) = 2xy - 4y$ (b) $f(x,y) = \cos(xy)$ (c) $f(x,y) = e^{3x-y}\cos(xy)$

    (d) $f(x,y,z) = \dfrac{x^3y^2}{z}$ (e) $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x+1}$ (f) $f(x,y) = x\,e^{\sqrt{xy}}$

    (g) $f(x,y) = x^2\ln(1+x^2+y^2)$ (h) $f(x,y) = x^y$ (i) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2+y^2)$

16. Seja $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{se} \quad x^2+y^2 \geq 1 \\ 0 & \text{se} \quad x^2+y^2 < 1 \end{cases}$.

    (a) Estude $f$ quanto à continuidade.

    (b) Mostre que não existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$.

    (c) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.

17. Verifique que a função $z = 1/(x^2+y^2)$ satisfaz as equações:

    (a) $x\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = -3\,\dfrac{\partial z}{\partial x}$

    (b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{4}{(x^2+y^2)^2}$

18. Uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfaz a equação de Laplace se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

    Mostre que $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ satisfaz a equação de Laplace.

19. Sejam $f(x,y)$ e $g(x,y)$ duas funções reais de classe $\mathcal{C}^2$, tais que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

    Mostre que $f$ satisfaz a equação de Laplace.

20. Para cada uma das funções determine o domínio de aplicabilidade do teorema de Schwarz.

    (a) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$ (b) $f(x,y) = \dfrac{1}{y}\cos x^2$ (c) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

21. Considere $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

    (a) Verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) = 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0) = 1$.

    (b) Determine onde falha o Teorema de Schwarz.

### Diferenciabilidade

22. Considere a função
$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{se} \quad xy\neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad xy=0 \end{cases}.$$
    (a) Determine, se possível, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
    (b) Averigue se $f$ é contínua na origem. O que pode concluir sobre a diferenciabilidade de $f$ na origem?
    (c) Mostre que $f_x$ e $f_y$ existem na origem. Será que este facto contradiz o resultado da alínea anterior.

23. Mostre que a função
$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$
    tem derivadas parciais na origem, mas não é contínua nesse ponto. Que conclusão pode tirar?

### Derivada da função composta - Regra da cadeia

**Nota**: Nos exercícios sobre a regra da cadeia, $F$ representa a função composta.

24. Considere $f(x,y)=2x^2+2y^2$, onde $x=\sin t$ e $y=\cos t$. Calcule pela regra da cadeia $F'(t)$.

25. Considere $f(x,y)=\ln(x+y)$, onde $x=2u-v$ e $y=2v-u$. Calcule pela regra da cadeia $(F_v)^2+F_{vu}$.

26. Seja $z=xy+f\left(\frac{xy}{x-y}\right)$, onde $f$ é uma função r.v.r diferenciável. Calcule $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

27. Seja $F(x,y,z)=f(x-y,y-z,z-x)$ uma função diferenciável. Mostre que $F_x+F_y+F_z=0$.

28. Seja $f(x,y)$ uma função diferenciável, em que $x=\ln(r\cos\theta)$ e $y=r\text{sen}(\theta)$.
    (a) Usando a regra da cadeia, determine as derivadas parciais de primeira ordem $F_\theta$ e $F_r$.
    (b) Sabendo que $f(x,y)=e^x\ln y$, calcule $F_\theta$ e $F_r$ no ponto $(r_0,\theta_0)=(2,\pi/4)$.

### Gradiente & Derivada direcional

29. Determine a derivada direcional da função $f$ no ponto $P$, na direção de $\vec{u}$.
    (a) $f(x,y)=2xy-3y^2,\ P(5,5),\ \vec{u}=(4,3)$
    (b) $f(x,y,z)=xy+yz+zx,\ P(1,-1,2),\ \vec{u}=(3,6,-2)$
    (c) $f(x,y,z)=3e^x\cos(yz),\ P(0,0,0),\ \vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$

30. Determine as direções nas quais as funções crescem e decrescem mais rapidamente e nas quais não há variação no ponto $P$. Determine as derivadas nessas direções.
    (a) $f(x,y)=x^2+xy+y^2,\ \ P(-1,1)$
    (b) $f(x,y)=x^2y+e^{xy}\sin y,\ \ P(1,0)$
    (c) $f(x,y,z)=xe^y+z^2,\ \ P(1,\ln 2,1/2)$
    (d) $f(x,y,z)=\ln(xy)+\ln(yz)+\ln(xz),\ \ P(1,1,1)$

31. A temperatura num ponto do espaço é dada por $T(x,y,z) = 200e^{-x^2-3y^2-9z^2}$.

    (a) Determine a taxa de variação da temperatura no ponto $P(0,1,0)$ na direção do vetor $\vec{u} = (2,-1,2)$.

    (b) Qual é a direção do maior aumento da temperatura em $P$?

32. Será que existe uma direção $\vec{u}$ na qual a taxa de variação de $f(x,y) = x^2 - 3xy + 4y^2$ em $P(1,2)$ é igual a 14? Justifique.

33. Será que existe uma direção $\vec{u}$ na qual a taxa de variação da temperatura $T(x,y,z) = 2xy - yz$ no ponto $P(1,-1,1)$ é igual a $-3$? Justifique.

34. A derivada de $f(x,y,z)$ num ponto $P$ é maior na direção de $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Nessa direção, o valor da derivada é $2\sqrt{3}$. Determine:

    (a) $\nabla f(P)$;

    (b) a derivada de $f$ em $P$ na direção de $\vec{i} + \vec{j}$.

**Gradiente & Curvas de nível**

35. Faça um esboço da curva de nível $f(x,y) = c$ que passa no ponto $P$ e do gradiente de $f$ nesse ponto.

    (a) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2), \quad P(1,1)$

    (b) $f(x,y) = y - x^2, \quad P(-1,0)$

    (c) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2}, \quad P(\sqrt{2},1)$

**Gradiente & Superfícies**

36. Determine as equações do plano tangente e da reta normal no ponto $P$ da superfície dada.

    (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 3, \quad P(1,1,1)$ (b) $2z - x^2 = 0, \quad P(2,0,2)$

    (c) $z = \ln(x^2 + y^2), \quad P(1,0,0)$ (d) $z = \sqrt{y-x}, \quad P(1,2,1)$

37. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função $f$ no ponto $P$.

    (a) $f(x,y) = 2x^2y, \quad P(1,1,f(1,1))$

    (b) $f(x,y) = x\, e^{x^2-y^2}, \quad P(2,2,f(2,2))$

**Gradiente & Aproximação linear**

38. Considere a função $f(x,y) = \sqrt{50 - x^2 - y^2}$. Utilizando a aproximação linear de $f$ num certo ponto $(x_0, y_0)$, calcule um valor aproximado de $f(2.9, 4.1)$.

39. Considere a função $f(x,y) = (xe^y)^8$.

    (a) Calcule $f_x$ e $f_y$ no ponto $(1,0)$.

    (b) Utilize os valores obtidos na alínea anterior para calcular um valor aproximado de $(0.99\, e^{0.02})^8$.

40. Utilize diferenciais para obter uma aproximação do incremento de $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y$ quando o ponto varia de $(1,2)$ para $(1.03, 1.99)$.

41. Determine a aproximação linear $L(x,y)$ da função $f(x,y)$ em torno de $P_0$.

    (a) $f(x,y) = x^2 - 3xy + 5,\ P_0(2,1)$

    (b) $f(x,y) = 1 + y + x\cos y,\ P_0(0,0)$

    (c) $f(x,y) = \ln x + \ln y,\ P_0(1,1)$

42. Considere um cilindro de raio $r_0 = 5.0$ cm e altura $h_0 = 12.0$ cm, medidos com precisão milimétrica. Qual é o erro estimado máximo que devemos esperar ao calcular o seu volume $V = \pi r^2 h$?

43. As dimensões de uma caixa retangular fechada são 8 dm, 6 dm e 5 dm, com um erro máximo de 0.02 dm cada. Utilize diferenciais para estimar a variação máxima da área de superfície da caixa.

44. Para aproximar o volume de um cilindro de raio de cerca de 2 m e altura cerca de 3 m, com que precisão devem ser medidos o raio e a altura de modo a que o erro estimado do volume não exceda 0.1 m$^3$? Suponha que o erro resultante da medição do raio é igual ao erro resultante da medição da altura.

**Extremos simples e condicionados - Otimização**

45. Para cada uma das funções, determine os extremos locais e os pontos sela.

    (a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$ (b) $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$

    (c) $f(x,y) = 9x^3 + \dfrac{y^3}{3} - 4xy$ (d) $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + xy + \dfrac{1}{y}$

    (e) $f(x,y) = 3x^4 + 2y^4$ (f) $f(x,y) = x^5 + 2y^5$

46. Determine os pontos críticos da função $h(x,y) = (y - x^2)^2 - x^4 + 2xy$. Sabendo que $(0,0)$ e $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ são pontos críticos de $h$ verifique se são extremos e classifique-os.

47. Um fabricante de produtos eletrónicos determina que o lucro em euros, obtido pela produção de $x$ unidades de um leitor de DVD e $y$ unidades de um gravador de DVD, é dado pela expressão $P(x,y) = 8x + 10y - 0.001(x^2 + xy + y^2) - 10\,000$. Calcule o lucro máximo, sabendo que a fábrica tem capacidade para produzir o número de unidades $x$ e $y$ necessárias.

48. Para cada uma das funções, o discriminante $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ é zero na origem, de modo que o teste das derivadas de segunda ordem é inconclusivo. Averigue se as funções têm extremo na origem.

    (a) $f(x,y) = x^2y^2$ (b) $f(x,y) = 1 - x^2y^2$ (c) $f(x,y) = xy^2$

49. Verifique se a função $f$ tem extremos no conjunto, aberto, definido pela condição.

    (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ em $x^2 + y^2 < 1$;

    (b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ em $(x-2)^2 + y^2 < 1$;

    (c) $f(x,y) = xy^2 + x^2 - 2x$ em $|y| < 1$.

50. Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange.

    (a) Calcule e classifique os extremos da função $f(x, y) = 49 - x^2 - y^2$ sobre a reta $x + 3y = 10$.

    (b) Determine os pontos da curva $x^2 + xy + y^2 = 1$ que estão mais próximos e mais afastados da origem.

    (c) Calcule os extremos absolutos da função $f(x, y, z) = x - 2y + 5z$ sobre a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

    (d) Determine as dimensões de uma lata cilíndrica circular reta fechada, de volume $16\pi\,\mathrm{cm}^3$, de forma que a área da sua superfície seja mínima.

51. Determine os extremos da função $f(x, y) = x^3 + xy$ no conjunto, limitado e fechado, definido pelas condições $y = x^2$ e $0 \leq x \leq 1$.

52. Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange para calcular os extremos absolutos da função $f(x, y) = x - y^2$ sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$, sabendo que $x \geq 0$.

53. A temperatura em cada ponto $(x, y)$ de uma chapa metálica é dada por $T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$. Uma formiga anda sobre a chapa em redor da circunferência de raio 5 centrada na origem. Quais são as temperaturas máxima e mínima encontradas pela formiga?

54. Uma placa circular plana, com o formato da região $x^2 + y^2 \leq 1$, é aquecida de tal modo que a temperatura no ponto $(x, y)$ é dada por $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$. Determine as temperaturas nos pontos mais quentes e mais frios da placa.

55. Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange para calcular o mínimo da função $f(x, y) = x^2 + y^2 - 49$ sobre a reta $y + 2x = 5$.

56. Considere o seguinte problema de otimização:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x, y, z) = x + y + z \\ \text{s. a} & x^2 + y^2 + z^2 = 25 \end{array}$$

    (a) Interprete geometricamente o problema anterior.

    (b) Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, determine a solução do problema.

57. Pretende-se maximizar a produção de uma fábrica $P(x, y) = x^{2/3}y^{1/3}$ depende da quantidade de duas matérias-primas $x$ e $y$, tendo como condição o orçamento disponível. Supondo que o preço de cada matéria-prima é igual a 100 euros e que o orçamento disponível é de 378 000 euros, de que maneira se pode esgotar o orçamento?

58. Um contentor na forma de um paralelipípedo deve ter um volume fixo de $14\ \mathrm{m}^3$, para o construir sabe-se que por metro quadrado a base custará 50 euros e os lados e o topo custarão 30 euros. Utilize multiplicadores de Lagrange para determinar as dimensões do contentor de forma a minimizar o custo de produção $C(x, y, z) = 50xy + 30(2xz + 2yz + xy)$.

## 2. Integração múltipla

**Integral duplo**

1. Determine o valor dos seguintes integrais duplos.

   (a) $\displaystyle\iint_R \frac{y}{x}\, dA$, em que $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le e,\ 0 \le y \le 1\}$

   (b) $\displaystyle\iint_R \cos(x+y)\, dA$, em que $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi\}$

   (c) $\displaystyle\iint_R x\cos(x+y)\, dA$, onde $R$ é a região triangular de vértices $(\pi,\pi)$, $(\pi,0)$ e $(0,0)$

   (d) $\displaystyle\iint_R e^{x+y}\, dA$, em que $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| \le 1\}$

   (e) $\displaystyle\iint_R y\, dA$, em que $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4,\ y \ge 0\}$

   (f) $\displaystyle\iint_R \frac{1}{\ln(y)}\, dA$, em que $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \le y \le 3,\ 0 \le x \le \frac{1}{y}\}$

2. Em cada alínea apresente um esboço da região de integração e calcule o valor do integral.

   (a) $\displaystyle\int_1^4\int_{\sqrt{y}}^{y} x^2y^3\, dx\, dy$ (b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{4-2x} x+y\, dy\, dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{x^2} xy\, dy\, dx$ (d) $\displaystyle\int_1^2\int_0^{1/x} xe^{xy}\, dy\, dx$

3. Determine a região de integração e inverta a ordem de integração.

   (a) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\, dy\, dx$ (b) $\displaystyle\int_1^e\int_0^{\ln x} f(x,y)\, dy\, dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1\int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\, dy\, dx$

4. Calcule invertendo a ordem de integração.

   (a) $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 \sin(x^3)\, dx\, dy$ (b) $\displaystyle\int_0^1\int_1^2 e^{y/x}\, dx\, dy + \int_1^2\int_y^2 e^{y/x}\, dx\, dy$ (c) $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}\, dx\, dy$

5. Calcule a área da região definida por cada conjunto de condições.

   (a) $y = x, \quad y = -x^2+x+1, \quad -1 \le x \le 1$

   (b) $y = e^{|x|}, \quad x = -1, \quad x = 1, \quad y = 0$

   (c) $y = x+1, \quad y = x-1, \quad y = -x+1, \quad y = -x-1$

6. Determine o volume dos sólidos definidos pelas condições.

   (a) $0 \le x \le 1, \quad x \le y \le 2, \quad y^2 \le z \le 4.$

   (b) $x+y+z \le 1, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0$

7. Calcule a área das superfícies tridimensionais.

   (a) Parte do cilindro $y^2+z^2 = 9$ que está acima do retângulo definido por $0 \le x \le 2$ e $-3 \le y \le 3$.

   (b) Parte do plano $2x+2y+z = 8$ que está no primeiro octante ($x \ge 0$, $y \ge 0$ e $z \ge 0$).

   (c) Parte do cone $z^2 = 4x^2+4y^2$ que está acima da região no primeiro quadrante de $xOy$, limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$.

8. Considere uma lâmina retangular de comprimento $y = 2$, largura $x = 4$ e densidade $3xy$, com o vértice inferior esquerdo na origem. Determine a massa e os momentos de inércia da lâmina.

9. Uma lâmina tem a forma de um triângulo-retângulo de vértices $(2, 4), (2, 0)$ e $(0, 0)$. Determine o centro de massa da lâmina de densidade $9xy^2$.

10. Calcule o momento de inércia para uma secção retangular de uma viga de lados $a = 1$ m, $b = 3$ m e densidade constante, em que o eixo passa pelo centro e é paralelo ao lado $a$.

**Coordenadas polares**

11. Dados os seguintes pontos em coordenadas polares, determine as suas coordenadas cartesianas:

    (a) $(2, 0)$ (b) $(3, \pi/6)$ (c) $(7, \pi/2)$ (d) $(3, 5\pi/3)$

12. Dados os seguintes pontos em coordenadas cartesianas, determine as suas coordenadas polares:

    (a) $(2, 0)$ (b) $(1, \sqrt{3})$ (c) $(\sqrt{3}, -1)$ (d) $(6, 6)$

13. Escreva em coordenadas polares o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$, definido por:

    (a) $y = 2$ (b) $y = \sqrt{3}\, x$ (c) $x^2 + y^2 = 16$ (d) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$

14. Faça um esboço do conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas polares satisfazem a equação $r = f(\theta)$.

    (a) $r = \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$ (b) $r = 2|\cos\theta|, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

    (c) $r = \sin(2\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$ (d) $r = 2 + \cos\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

**Integral duplo em coordenadas polares**

15. Calcule a área da região polar definida por $r = \sin(2\theta)$, com $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

16. Utilize coordenadas polares para calcular:

    (a) $\displaystyle\int\int_R e^{x^2+y^2}\, dA$, onde $R$ é a região definida pela condição $x^2 + y^2 \leq 1$

    (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dydx$

    (c) $\displaystyle\int_0^3 \int_{-x}^{x} dydx$

    (d) $\displaystyle\int\int_R y\, dA$, onde $R$ é a região definida pela condição $x^2 + y^2 \leq 4$.

17. Determine o volume dos sólidos definidos pelas condições:

    (a) $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$

    (b) $x^2 + y^2 \leq 1, \quad x + y + 2 \leq z \leq 4$

18. Calcule a área de superfície do paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ que está acima do plano $xOy$.

19. Determine a massa de uma lâmina de densidade $\delta(x, y) = x^2 + y^2$, com o formato da coroa circular $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$.

**Integral triplo**

20. Determine o valor dos seguintes integrais triplos.

   (a) $\displaystyle\iiint_S x^2 + 5y^2 - z \; dV$, em que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2 \wedge -1 \leq y \leq 1 \wedge 2 \leq z \leq 3\}$

   (b) $\displaystyle\iiint_S \frac{1}{(x+1)^2} \; dV$, em que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x + y + z \leq 1\}$

   (c) $\displaystyle\iiint_S y \; dV$, em que $S$ é o sólido limitado pelos planos $z = 0$, $z = y$ e pelo cilindro parabólico $y = 1 - x^2$, com $y \geq 0$.

21. Nas alíneas seguintes, utilize integrais triplos para calcular o volume do sólido.

   (a) Sólido contido no primeiro octante, limitado pelos planos coordenados e pelo plano $3x + 6y + 4z = 12$.

   (b) Sólido limitado pela superfície $y = x^2$ e pelos planos $y + z = 4$ e $z = 0$.

22. Faça um esboço do sólido cujo volume é dado pelo integral.

   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{y+1} 1 \; dz\, dy\, dx$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{9}\int_{0}^{y/3}\int_{0}^{\sqrt{y^2-9x^2}} 1 \; dz\, dx\, dy$

23. Usando integrais triplos, determine o volume do elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

**Coordenadas cilíndricas e esféricas**

24. Mude as coordenadas de um sistema para outro conforme especificado em cada alínea.

   (a) $(2, 2\pi/3, 4)$ – Cilíndricas para cartesianas;

   (b) $(-2, 2\sqrt{3}, -4)$ – Cartesianas para cilíndricas;

   (c) $(3, \pi/3, \pi/4)$ – Esféricas para cartesianas;

   (d) $(-1, 1, -\sqrt{2})$ – Cartesianas para esféricas;

25. Represente no espaço cartesiano as condições dadas em coordenadas cilíndricas.

   (a) $r = 1$ (b) $\theta = \frac{\pi}{4}$

   (c) $z = 1$ (d) $0 \leq r \leq 1,\; 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4},\; 0 \leq z \leq 1$

26. Represente no espaço cartesiano as condições dadas em coordenadas esféricas.

   (a) $\rho = 1$ (b) $\theta = \frac{\pi}{4}$

   (c) $\phi = \frac{\pi}{4}$ (d) $0 \leq \rho \leq 1,\; 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4},\; 0 \leq \phi \leq \dfrac{\pi}{4}$

27. Escreva a equação:

   (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ em coordenadas cilíndricas e esféricas;

   (b) $r^2 \cos(2\theta) = z^2$ em coordenadas cartesianas;

   (c) $\rho \sin \phi = 1$ em coordenadas cartesianas e cilíndricas.

**Integral triplo em coordenadas cilíndricas e esféricas**

28. Utilize coordenadas cilíndricas para calcular o integral triplo da função:

    (a) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ na região $S$ definida pelas desigualdades $0 \le r \le 4$, $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}$ e $-1 \le z \le 1$;

    (b) $f(x,y,z) = \sin(x^2+y^2)$, onde $S$ é o cilindro de altura 4 com base dada pela circunferência de raio 1 e centro $(0,0,-1)$, totalmente contida no plano $z=-1$.

29. Usando coordenadas cilíndricas, calcule:

    (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{2+x^2+y^2} 1 \, dz\, dy\, dx$

    (b) $\displaystyle\iiint_S x^2+y^2 \; dV$, onde $S$ é o sólido limitado pela superfície $x^2+y^2 = 2z$ e por $z=2$.

    (c) $\displaystyle\iiint_S \sqrt{x^2+y^2+z^2} \; dV$, onde $S$ é o cilindro definido por $x^2+y^2 \le 1$ e $0 \le z \le 1$.

30. Utilize coordenadas esféricas para calcular:

    (a) o volume da esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$, com $a > 0$.

    (b) o volume do sólido definido pela condição $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$.

    (c) $\displaystyle\iiint_S dV$, onde $S$ representa o sólido limitado por duas esferas de centro na origem e raio $a$ e $b$, respectivamente, com $0 < a < b$.

31. Utilize coordenadas cilíndricas ou esféricas para calcular:

    (a) $\displaystyle\int_0^5 \int_0^{\sqrt{5^2-x^2}} \int_0^{5^2-x^2-y^2} x^2 \; dz\, dy\, dx$

    (b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \; dz\, dy\, dx$

    (c) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2 \; dz\, dx\, dy$

    (d) $\displaystyle\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \; dz\, dx\, dy$

32. Determine a massa e o centro de massa do sólido localizado no primeiro octante, limitado pelo cilindro $x^2+y^2 = a^2$ e pelo plano $z = a$, sabendo que a densidade do sólido é $\delta(x,y,z) = xyz$.

33. Considere o sólido $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z \ge 0 \; \wedge \; 4 \le x^2+y^2+z^2 \le 16\}$.

    (a) Faça um esboço do sólido.

    (b) Escreva um integral triplo que permita calcular o volume de $S$, em coordenadas esféricas.

    (c) Determine a massa total do sólido $S$ de densidade constante igual a 3.

34. Considere o integral triplo $I = \displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^2 \; dzdydx$.

    (a) Faça um esboço do sólido $S$ cujo volume é dado pelo integral $I$.

    (b) Escreva o integral triplo em coordenadas cilíndricas.

    (c) Determine o valor de $I$.

35. Seja $S = \{(\rho,\theta,\phi) : \; 0 \le \theta \le \pi/2 \; \wedge \; 0 \le \phi \le \pi/2 \; \wedge \; 1 \le \rho \le 2\}$ um sólido de densidade constante 1.

    (a) Faça um esboço do sólido $S$ no espaço cartesiano e calcule o seu volume.

    (b) Determine a cota do centro de massa do sólido.

## 3. Transformadas de Laplace

**Definição, Existência e Propriedades**

1. Utilize a definição de transformada de Laplace, para calcular a transformada de cada uma das funções.

   (a) $f(t) = t$ (b) $f(t) = \cos(t)$

   (c) $f(t) = \begin{cases} t & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{se } t > 1 \end{cases}$ (d) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ e^{2t} & \text{se } t > 1 \end{cases}$

2. Mostre que existe a transformada de Laplace de cada uma das funções, para os valores de $s$ indicados.

   (a) $f(t) = \dfrac{1}{1+t},\ s > 0$ (b) $f(t) = \dfrac{e^{at}}{1+t^2},\ s > a$

   (c) $f(t) = \sqrt{t},\ s > 1$ (d) $f(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 2 & \text{se } t > 1 \end{cases},\ s > 0$

3. Sejam $a$ e $b$ constantes reais. Utilize as propriedades da transformada de Laplace para calcular a transformada de cada uma das funções.

   (a) $f(t) = \sin(at)\cos(bt)$ (b) $f(t) = e^{-t}\cos(2t)$

   (c) $f(t) = t^2\cos(bt)$ (d) $f(t) = \displaystyle\int_0^t x^2 e^x\, dx$

4. Represente no plano cada uma das funções $p$-periódicas e determine as respetiva transformada de Laplace, utilizando as propriedades das transformadas.

   (a) $f(t) = e^t,\ \ t \in [0,1[,\ \ \ p = 1$

   (b) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t < 2 \\ 1 & \text{se } 2 \leq t < 3 \end{cases},\ \ p = 3$

   (c) $f(t) = \sin(\frac{t}{2}),\ \ t \in ]0, 2\pi],\ \ \ p = 2\pi$

**Funções degrau unitário, Funções definidas por ramos, Convolução de funções**

5. Utilize as propriedades da transformada de Laplace para calcular a transformada de cada uma das funções.

   (a) $f(t) = \mu_3(t)t^2 + e^{-t}\cos(t)$ (b) $f(t) = \sin^2(t) - 2\displaystyle\int_0^t u\sinh(u)\, du + (1+t)\mu_2(t)$

6. Defina as funções utilizando funções degrau unitário e calcule as respetivas transformadas de Laplace.

   (a) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ (t-1)e^t & \text{se } t > 1 \end{cases}$ (b) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t \leq \pi \\ \sin(t-\pi) & \text{se } t > \pi \end{cases}$

   (c) $f(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ (d) $f(t) = \begin{cases} 4 & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 2 & \text{se } 1 < t \leq 2 \\ 0 & \text{se } t > 2 \end{cases}$

7. Determine os seguintes produtos de covolução:

   (a) $1 * \sinh(t)$ (b) $f(t) = t^2 * e^t$ (c) $f(t) = \cosh(t) * e^t$

8. Utilize o teorema da convolução para determinar a transformada de Laplace dos produtos de convolução do exerício anterior.

**Transformada inversa de Laplace**

9. Determine a transformada inversa de Laplace de cada uma das funções, utilizando o produto de convolução.

   (a) $H(s) = \dfrac{1}{s(s-2)}$ (b) $H(s) = \dfrac{1}{s(s^2+1)}$ (c) $H(s) = \dfrac{s^2}{(s^2+1)^2}$

10. Utilize a tabela das transformadas de Laplace para calcular as transformadas inversas das funções.

    (a) $F(s) = \dfrac{2s}{s^2-4}$ (b) $F(s) = \dfrac{s}{(s-2)^2}$ (c) $F(s) = \dfrac{1}{s^2+3s+2}$

    (d) $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{(s-2)^2}$ (e) $F(s) = \dfrac{e^{-4s}-e^{-7s}}{s^2}$ (f) $F(s) = \dfrac{2-e^{-3s}}{s^2+9}$

**Aplicação da transformada de Laplace na resolução de EDO lineares de coeficientes constantes**

11. Determine a solução dos problemas de condição inicial, utilizando a transformada de Laplace.

    (a) $y' - 4y = \mu_2(t), \quad y(0) = 0$

    (b) $2y'' + y' = 1, \quad y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$

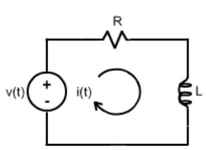
    (c) $y''' + y = e^t, \; y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$

12. Determine a solução particular dos sistemas de equações diferenciais lineares.

    (a) $\begin{cases} x' + x - y &= e^t \\ x' + y - x &= e^t \end{cases}, \qquad x(0) = y(0) = 1.$

    (b) $\begin{cases} y'' + y + x &= 0 \\ x' + y' &= 0 \end{cases}, \qquad x(0) = 1 \;$ e $\; y(0) = y'(0) = 1.$

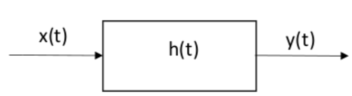
13. Determine a corrente $i(t)$ no circuito RL representado na figura, sabendo que esta satisfaz a equação

    $$v(t) = i(t)R + L\,i'(t), \; \text{com} \;\; i(0) = 0,$$

    onde $v(t) = 12\,V$ (volt) é o potencial, $L = 0.1\,H$ (henry) é a indutância e $R = 5\,\Omega$ (Ohms) é a resistência.

14. Considere o Sistema Linear Invariante no Tempo (SLIT), descrito pela equação diferencial ordinária $y''(t) + 3y(t) = x(t)$, com $x(t) = \mu_1(t)$ e condições iniciais nulas (i.e. $y(0) = y'(0) = 0$), em que $x(t)$ é o sinal de entrada do sistema e $y(t)$ é o sinal de saída.

    (a) Determine o sinal de saída $y(t)$.

    (b) Sabendo que a saída de um SLIT é dada pelo produto de convolução entre a resposta impulsional $h(t)$ e o sinal de entrada $x(t)$, i.e. $y(t) = h(t) * x(t)$, determine:

       i. $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$;

       ii. a resposta impulsional $h(t)$.

4. Séries

**Definição de série numérica convergente e condição necessária de convergência**

1. Determine a sucessão das somas parciais e, se possível, calcule a soma das séries.
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(3n-5)$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

2. Considere a série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ cuja soma parcial de ordem $n$ é dada por $S_n = \frac{2n+3}{n+1}$. Mostre que a série é convergente e calcule a sua soma. Determine a expressão do termo geral da série, $a_n$.

3. Mostre que as séries são divergentes, utilizando a Condição Necessária de Convergência (CNC).
   (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n+1}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+10}$

**Séries de Dirichlet, Geométrica e telescópica, Propriedades das séries**

4. Determine o termo geral e a natureza da seguinte série numérica: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$.

5. Determine o termo geral e a soma da seguinte série numérica: $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots$.

6. Mostre que as séries são geométricas, determine a razão e sempre que possível calcule a sua soma.
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{2^{n+1}}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{2^{n+1}}$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n}$ (e)$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{2n}5^{1-n}$

7. Mostre que as seguintes séries são telescópicas e averigue se são convergentes ou divergentes.
   (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2n}} - \frac{1}{\sqrt{2n+4}}\right)$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+2}\right)$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$ (f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

8. Estude a convergência e, se possível, calcule a soma das seguintes séries numéricas:
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ (b) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{9n^2+3n-2}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ (d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{3^n}$
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{2n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \cos(n\pi)\right)$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n$

**Séries de termos não negativos**

9. Determine a natureza das séries das séries recorrendo ao critério da razão (ou de d'Alembert).
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}n^2}{3^n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2.4\ldots(2n+2)}{1.5\ldots(4n+1)}$

10. Discuta a natureza da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{n}$, com $k \in \mathbb{R}_0^+$.

11. Determine a natureza das séries recorrendo ao critério da raiz (ou de Cauchy)
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{3n}\right)^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[(-1)^n+5n]^n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^3}$

12. Determine a natureza das séries recorrendo ao critério do integral.

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^2-1}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)(4n-1)}$

**Séries de termos negativos e positivos, convergência simples e absoluta**

13. Determine a natureza das séries alternadas recorrendo ao critério de Leibniz.

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n+3}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^{-n}$

14. Mostre que a série alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n+1}{n^2}$ é simplesmente convergente.

15. Estude as séries numéricas quanto à convergência simples e absoluta.

    (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(\frac{n+4}{n}\right)$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n$

**Séries de potências - Séries de Taylor**

16. Determine o raio de convergência e o maior intervalo de convergência aberto das séries de potências.

    (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}3^n x^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{2^n}x^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln(n)}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1.2.3\ldots n}{1.3.5\ldots(2n-1)}x^{2n+1}$

    (e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n!(x-2)^n}{n-1}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n-1}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{2^n}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n(x+5)^n$

17. Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$ é absolutamente convergente para todo $x\in[-1,1]$.

18. Dada a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$ mostre que $I=]-2,2[$ é o intervalo de convergência da série e que a função definida no intervalo $I$ por $f(x)=\frac{2}{2-x}$ é a função soma da série.

19. Determine, por definição, a série de Taylor centrada em $x_0$ de cada uma das funções.

    (a) $x^3-2x+4,\ x_0=2;$ (b) $\dfrac{1}{x^2},\ x_0=1;$ (c) $\dfrac{x}{1-x},\ x_0=0;$

    (d) $\ln(x),\ x_0=1;$ (e) $e^x,\ x_0=-2;$ (f) $\cos(x),\ x_0=0;$

20. Considere os seguintes desenvolvimento em série de Maclaurin:

    **i.** $\displaystyle\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ \forall x\in]-1,1[;$ **ii.** $\displaystyle e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ \forall x\in\mathbb{R};$ **iii.** $\displaystyle\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ \forall x\in\mathbb{R}.$

    Utilizando os desenvolvimentos anteriores, determine as série de potências de $x-x_0$ de cada uma das funções e o maior intervalo aberto em que a série representa a função.

    (a) $f(x)=x^2e^x,\ x_0=0$ (b) $f(x)=e^x,\ x_0=1$ (c) $f(x)=\dfrac{1}{x+4},\ x_0=0$

    (d) $f(x)=\dfrac{1}{x+4},\ x_0=-3$ (e) $f(x)=\ln(1-x),\ x_0=0$ (f) $x\cos(x),\ x_0=0$

    (g) $f(x)=\cosh(2x),\ x_0=0$ (h) $f(x)=2^x,\ x_0=0$ (i) $\dfrac{1}{(1-x)^2},\ x_0=0$